DOI:10.13471/j.cnki.acta.snus.2016.05.005

给定阶子群的 $\mathcal{M}$ – 次正规性对群结构的影响*

高百俊[1,2]，张　佳[1]，缪　龙[1]
（1. 扬州大学数学科学学院，江苏 扬州 225002；
2. 伊犁师范学院数学与统计学院，新疆 伊宁 835000）

摘　要： 子群 H 在群 G 中称为 $\mathcal{M}$ – 次正规，若存在 G 的次正规子群 K，使得 $G=HK$，且对于 H 的任意极大子群 H_1，都有 H_1K 为 G 的真子群。利用给定阶子群的 $\mathcal{M}$ – 次正规性研究有限群的结构，得到了 p – 幂零群、幂零群以及 p – 超可解群等饱和群系的一些新的结果。

关键词： $\mathcal{M}$ – 次正规子群；p – 幂零群；幂零群；p – 超可解群；Sylow 子群

中图分类号： O152.1　　**文献标志码：** A　　**文章编号：** 0529 – 6579（2016）05 – 0027 – 04

The influence of $\mathcal{M}$ – subnormal subgroups with given order on the structure of finite groups

GAO Baijun[1,2], *ZHANG Jia*[1], *MIAO Long*[1]
(1. School of Mathematical Sciences, Yangzhou University, Yangzhou 225002, China;
2. School of Mathematics and Statistics, Yili Normal University, Yining 835000, China)

Abstract: A subgroup H of G is called $\mathcal{M}$-subnormal in G, if there exists a subnormal subgroup K of G such that $G = HK$ and H_1K is a proper subgroup of G for every maximal subgroup H_1 of H. The structure of finite groups is investigated and some new results for p- nilpotent groups, nilpotent groups and p- supersolvable groups are obtained by using $\mathcal{M}$-subnormal subgroups with given order.

Key words: $\mathcal{M}$ -subnormal subgroups; p -nilpotent groups; nilpotent groups; p- supersolvable groups; Sylow subgroups

子群的性质对有限群的结构有着重要的影响。近年来，许多学者在这一方面进行了深入地研究。例如：文［1］通过对群阶的极小素因子的考查，利用群 G 的给定阶子群的弱 s – 置换性质，得到了群 G 为 p – 幂零群的一个等价条件。文［2］考查了群 G 的某些素数幂阶弱 s – 嵌入子群对其超可解性的影响，并得到了关于饱和群系的几个新的刻画。进一步，子群的可补性质也影响着有限群的结构，通过各种不同限制条件的补，群论工作者也得到了很多新的刻画有限群结构的结论。例如：文［3］利用 $M_d(P)$ 中的群的 C^* – 正规性，对 p – 幂零群和超可解群进行了研究。文［4］从正规子群的极小补的角度提出 $\mathcal{M}$ – 可补子群的概念，得到了 p – 幂零、p – 超可解等饱和群系的一些新的结果。之后，文［5］利用 Sylow 子群的 $\mathcal{M}$ – 次正规性，得到了 p – 幂零群及 p – 超可解群的一些充分条件。文［6］提出了 $S\Phi$ – 可补子群的概念，利用给定阶子群的 $S\Phi$ – 可补性质对群的 p – 幂零性及 p – 超可解性进行了研究。文［7］提出了弱 Φ – 可补子群的概念，并利用准素子群的弱 Φ – 可补性质，得到了幂零群的一个新的刻画以及超可解群的一些新的结果。

作为以上工作的延伸和继续，我们将利用给定阶子群的 $\mathcal{M}$ – 次正规性，对 p – 幂零群、幂零群以

* **收稿日期：** 2016 – 02 – 25
基金项目： 国家自然科学基金资助项目（11271016）；江苏省研究生创新工程资助项目（KYZZ16_0488）
作者简介： 高百俊（1980 年生），女；**研究方向：** 有限群论；E-mail：dqgbj2008@163.com

及 p － 超可解群等饱和群系的结构进行进一步地研究，并得到一些新的结果。

文中所涉及的群均为有限群，所用术语与符号都是标准的，见文［8－9］。

1 预备知识

为方便起见，我们首先列出在后面的证明中将会用到的一些定义和结果。

定义 1[10] 称群 G 的子群 H 在 G 中是 $\mathcal{M}$ － 可补的，若存在 G 的子群 B，使得 $G = HB$，且对于 H 的任意极大子群 H_1，使得 H_1B 为 G 的真子群。子群 B 称为子群 H 在群 G 中的一个 $\mathcal{M}$ －补。若 B 是 G 的次正规子群，则称 H 在 G 中是 $\mathcal{M}$ － 次正规的。

引理 1[10] 设 G 是有限群，p 是 $|G|$ 的极小素因子，P 是 G 的一个 Sylow p － 子群。则 G 是 p － 幂零的当且仅当 P 在 G 中 $\mathcal{M}$ － 可补。

引理 2[9] 设 G 是有限群，p 是 $|G|$ 的极小素因子。设 H 是群 G 的一个子群且 $|G:H| = p$，则 H 正规于 G。

引理 3[10] 设 G 是有限群，则

（i）若 H 在 G 中 $\mathcal{M}$－可补（$\mathcal{M}$－次正规），且 $H \leqslant K \leqslant G$，则 H 在 K 中 $\mathcal{M}$－可补（$\mathcal{M}$－次正规）。

（ii）令 $N \trianglelefteq G$，且 $N \leqslant H \leqslant G$，若 H 在 G 中 $\mathcal{M}$ － 可补（$\mathcal{M}$ － 次正规），则 H/N 在 G/N 中 $\mathcal{M}$ － 可补（$\mathcal{M}$ － 次正规）。

（iii）令 π 是一个素数集，设 K 是 G 的正规 π' － 子群且 H 是 G 的正规 π － 子群，那么 H 在 G 中 $\mathcal{M}$ － 可补（$\mathcal{M}$ － 次正规）当且仅当 HK/K 在 G/K 中 $\mathcal{M}$ － 可补（$\mathcal{M}$ － 次正规）。

引理 4[8] 设 N 是群 G 的可解正规子群且 $N \neq 1$。若 $N \cap \Phi(G) = 1$，则 N 的 Fitting 子群 $F(N)$ 是 G 的包含于 N 中的所极小正规子群的直积。

引理 5[4] 设 $p \in \pi(G)$，P 是群 G 的一个 p － 子群且在 G 中有一个 $\mathcal{M}$ － 补子群 B。则

（iv）对于 P 的任意极大子群 P_1，$P \cap B = P_1 \cap B = \Phi(P) \cap B$ 且 $|G:P_1B| = p$。

（v）若 L 是 G 的极小正规子群且 $L \leqslant P$，则 $|L| = p$ 或 $L \leqslant \Phi(P)$。

引理 6[11] 设 P 是 G 的 Sylow p － 子群，$N \trianglelefteq G$。若 $P \cap N \leqslant \Phi(P)$，则 N 是 p － 幂零的。

引理 7[12] 如果 G 是一个 p － 超可解群且 $O_{p'}(G) = 1$，那么 G 是超可解的。

2 主要结果

定理 1 设 G 是一个群，p 为 $|G|$ 的极小素因子。G 是 p － 幂零群当且仅当存在 G 的一个 Sylow p － 子群 P，P 有子群 D 满足 $1 < D \leqslant P$，使得 P 的每一个阶为 $|D|$ 的子群在 G 中 $\mathcal{M}$ － 次正规。

证明 必要性显然。下面主要证明充分性。

（vi）若 $|D| = |P|$，则由引理 1 可知结论正确。

（vii）若 $|D| = p$，假设结论不真，设 G 为极小阶反例。

设 $\langle x \rangle$ 是 P 的极小子群，由定理的条件可知 $\langle x \rangle$ 在 G 中 $\mathcal{M}$－次正规，即存在 $K \trianglelefteq\trianglelefteq G$，使得 $G = \langle x \rangle K$，易见 $|G:K| = p$，由引理 2 知，$K \trianglelefteq G$。由引理 3（i）知 K 满足定理的条件，由 G 的选择可知 K 是 p － 幂零的，从而 K 存在正规 p － 补 L，且 L char $K \trianglelefteq G$，即 $L \trianglelefteq G$，因此 G 是 p － 幂零的，矛盾。

故当 $|D| = p$ 时，结论成立。

（viii）若 $p < |D| < |P|$，假设结论不真，设 G 为极小阶反例。

由引理 3（iii）及 G 的选择，容易验证 $O_{p'}(G) = 1$。任取 $H \leqslant P$ 且 $|H| = |D|$，由定理的条件可知 H 在 G 中 $\mathcal{M}$ － 次正规，即存在 $K \trianglelefteq\trianglelefteq G$，使得 $G = HK$，且对 H 的任意极大子群 H_1 都有 $H_1K < G$。因为 $K \trianglelefteq\trianglelefteq G$，所以必存在 G 的次正规列 $K \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq K_s \trianglelefteq G$，使得 $K_s \trianglelefteq G$ 且 $|G:K_s| = p$。令 $T = P \cap K_s$，则 T 是 K_s 的 Sylow p － 子群且 T 是 P 的一个极大子群，$|H| = |D| \leqslant |T|$，由引理 3（i）知 H 在 K_s 中 $\mathcal{M}$ － 次正规，由 G 的选择可知 K_s 是 p － 幂零的，这与 $O_{p'}(G) = 1$ 矛盾。

综合（vi）－（viii）可知定理 1 得证。

定理 2 设 G 是一个群。G 是幂零群当且仅当对于 $|G|$ 的任意素因子 p，令 P 是 G 的 Sylow$p$ － 子群，如果 P 有子群 D 满足 $1 < D \leqslant P$，使得 P 的每一个阶为 $|D|$ 的子群在 G 中 $\mathcal{M}$ － 次正规。

证明 必要性显然。下面主要证明充分性。

假设结论不真，设 G 为极小阶反例。

由定理 1 可知，G 有超可解的 Sylow 塔，于是令 p 是 $|G|$ 的极大素因子，P 是 G 的一个 Sylow p － 子群，则 $P \trianglelefteq G$。

（ix）若 $P \cap \Phi(G) \neq 1$，则取 L 是 G 的一个极小正规子群且 $L \leqslant P \cap \Phi(G)$。如果 $|L| < |D|$，那么由引理 3（ii）及（iii）可知 G/L 满足定理条件，由 G 的选择知 G/L 是幂零的。由饱和群系的定义可知，G 是幂零的，矛盾。如果 $|L| \geqslant |D|$，取 $H \leqslant L$ 且 $|H| = |D|$，那么由定理的条件可知 H 在 G 中 $\mathcal{M}$ － 次正规，即存在 $B \trianglelefteq\trianglelefteq G$，使得 $G = HB$，

且对 H 的任意极大子群 H_i 都有 $H_iB < G$。于是 $G = LH_iB = H_iB$，矛盾。

（x）若 $P \cap \Phi(G) = 1$，则由引理 4 知 $P = L_1 \times L_2 \times \cdots \times L_t$，这里 L_i 是 G 的极小正规子群，$i = 1,2,\cdots,t$。任取 $L \in \{L_1, L_2, \cdots, L_t\}$，如果 $|L| < |D|$，那么取 $E \leqslant P$ 使得 $L < E$ 且 $|E| = |D|$，由定理的条件可知，E 在 G 中 $\mathcal{M}$ − 次正规，即存在 $K \trianglelefteq \trianglelefteq G$，使得 $G = EK$，且对 E 的任意极大子群 E_i 都有 $E_iK < G$。又 $L \leqslant \Phi(G)$，所以 $L \leqslant \Phi(E)$，即存在 E 的一个极大子群 E_1，使得 $E = LE_1$。于是 $G = EK = LE_1K$，由引理 5（iv）知 $|L| = |G:E_1K| = p$。同时，由引理 3（ii）及（iii）可知 G/L 满足定理条件，由 G 的选择知，G/L 是幂零的，又由群系的定义可知 L 是唯一的，矛盾。如果 $|L| \geqslant |D|$，那么取 $E \leqslant L$ 且 $|E| = |D|$，由定理的条件可知，E 在 G 中 $\mathcal{M}$ − 次正规，即存在 $K \trianglelefteq \trianglelefteq G$，使得 $G = EK$，且对 E 的任意极大子群 E_i 都有 $E_iK < G$。进而有 $G = LE_iK$，由引理 5 知 $|L| = |G:E_iK| = p$。因此 $|L| = |D| = p$。L 在 G 中 $\mathcal{M}$ − 次正规，即存在 $B \trianglelefteq \trianglelefteq G$，使得 $G = LB$，由 L 的极小性知 $L \cap B = 1$，从而 $L \leqslant Z(G)$，即 $P \leqslant Z(G)$。同时，由引理 3（ii）及（iii）可知 G/P 满足定理条件，于是由 G 的选择知 G/P 是幂零的，故 G 是幂零的，矛盾。定理 2 证毕。

定理 3　设 G 是一个群，p 为 $|G|$ 的奇素因子。若 G 的 Sylow p − 子群 P 在 G 中 $\mathcal{M}$ − 次正规，则 G 是 p − 超可解的。

证明　假设结论不真，设 G 为极小阶反例。

由引理 1 及 G 的极小性，容易验证 $O_{p'}(G) = 1$。由于 P 在 G 中 $\mathcal{M}$ − 次正规，即存在 $K \trianglelefteq \trianglelefteq G$，使得 $G = PK$，且对 P 的任意极大子群 P_i 都有 $P_iK < G$。易见 $|G:P_iK| = p$，则 $G/(P_iK)_G$ 同构于 S_p 的一个子群。令 $T = \cap (P_iK)_G$，则 $T \cap P \leqslant \Phi(P)$，由引理 6 知 T 是 p − 幂零的。由于 $O_{p'}(G) = 1$，所以 T 是 p − 群，进而得 $T = 1$。否则，由引理 3（ii）知，G/T 满足定理条件，由 G 的极小性可知 G/T 是 p − 超可解的，从而 G 是 p − 超可解的，矛盾。因此，$G = G/\cap (P_iK)_G$ 同构于 $S_p \times \cdots \times S_p$ 的一个子群，于是 $\Phi(P) = 1$，从而 $P \cap K \leqslant \Phi(P) = 1$，因此 K 是 G 的 Hall p' − 子群，从而 $K \trianglelefteq G$，这与 $O_{p'}(G) = 1$ 矛盾。定理 3 证毕。

定理 4　设 G 是一个群，p 为 $|G|$ 的奇素因子，P 是 G 的一个 Sylow p − 子群。若 P 的每个极小子群在 G 中 $\mathcal{M}$ − 次正规，则 G 是 p − 超可解的。

证明　假设结论不真，设 G 为极小阶反例。

容易验证 $O_{p'}(G) = 1$。设 L 是 P 的任一极小子群，由定理的条件可知，存在 $K \trianglelefteq \trianglelefteq G$，使得 $G = LK$，$K < G$。因此 K 是 G 的一个极大子群且 $K \trianglelefteq G$，于是存在 P 的一个包含在 K 里的极小子群 L_1，使得 $K = L_1K_1$，这里 K_1 是 K 的极大子群且 $K_1 \trianglelefteq K$。由于 $|G|$ 有限，如此下去，可得 G 的一个次正规列 $K_s \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq K_1 \trianglelefteq K \trianglelefteq G$，这里 K_s 是 G 的 Hall p' − 子群，因此 $K_s \trianglelefteq G$，这与 $O_{p'}(G) = 1$ 矛盾。定理 4 证毕。

定理 5　设 G 是一个群，p 为 $|G|$ 的奇素因子。如果存在 G 的一个 Sylow p − 子群 P，P 有子群 D 满足 $1 < D \leqslant P$，使得 P 的每一个阶为 $|D|$ 的子群在 G 中 $\mathcal{M}$ − 次正规，那么 G 是 p − 超可解的。

证明　若 $|D| = |P|$，则由定理 3 可知结论成立。

若 $|D| = p$，则由定理 4 可知结论成立。

考虑 $p < |D| < |P|$，假设结论不真，设 G 为极小阶反例。

（xi）$O_{p'}(G) = 1$。

事实上，若 $O_{p'}(G) \neq 1$，考虑商群 $G/O_{p'}(G)$，则由引理 3（iii）知 $G/O_{p'}(G)$ 满足定理条件，由 G 的选择知 $G/O_{p'}(G)$ 是 p − 超可解的，因此 G 是 p − 超可解的，矛盾。

（xii）$O_p(G) \neq 1$。

令 $E \leqslant P$ 且 $|E| = |D|$，则 E 在 G 中 $\mathcal{M}$ − 次正规，即存在 $K \trianglelefteq \trianglelefteq G$，使得 $G = EK$，且对 E 的任意极大子群 E_1 都有 $E_1K < G$。因为 $K \trianglelefteq \trianglelefteq G$，所以必存在 $K_s \trianglelefteq G$ 且 $K \leqslant K_s$，使得 $|G:K_s| = p$。由引理 3（i）知 K_s 满足定理条件，由 G 的选择知 K_s 是 p − 超可解的，又由引理 7 知，K_s 是超可解的。因此，取 T 是 K_s 的一个 Sylow p − 子群，则 $T \trianglelefteq K_s$，进而 $T \trianglelefteq G$，即 $T \leqslant O_p(G)$，故 $O_p(G) \neq 1$。

（xiii）$O_p(G) \cap \Phi(G) = 1$。

若 $O_p(G) \cap \Phi(G) \neq 1$，则取 G 的一个极小正规子群 L 满足 $L \leqslant O_p(G) \cap \Phi(G)$。如果 $|L| < |D|$，那么由引理 3（ii）知 G/L 满足定理的条件，于是由 G 的选择可知 G/L 是 p − 超可解的。由饱和群系的定义可知，G 是 p − 超可解的，矛盾。如果 $|L| \geqslant |D|$，取 $H \leqslant L$ 且 $|H| = |D|$，那么 H 在 G 中 $\mathcal{M}$ − 次正规，即存在 $K \trianglelefteq \trianglelefteq G$，使得 $G = HK$，且对 H 的任意极大子群 H_i 都有 $H_iK < G$。于是 $G = LH_iK = H_iK$，矛盾。

（xiv）最后的矛盾。

由（xiii）及引理 4 知 $O_p(G) = L_1 \times L_2 \times \cdots \times L_t$，这里 L_i 是 G 的极小正规子群，$i = 1,2,\cdots,t$。任取 $L \in \{L_1, L_2, \cdots, L_t\}$。如果 $|L| \geqslant |D|$，那么取 H

$\leqslant L$ 且 $|H|=|D|$，则 H 在 G 中 $\mathcal{M}$ − 次正规，即存在 $K \trianglelefteq \trianglelefteq G$，使得 $G=HK$，且对 H 的任意极大子群 H_i 都有 $H_iK<G$，进而有 $G=LH_iK$，由引理 5（iv）知 $|L|=|G:H_iK|=p$，矛盾。如果 $|L|<|D|$，那么取 $H\leqslant P$ 使得 $L<H$ 且 $|H|=|D|$，则存在 $K \trianglelefteq \trianglelefteq G$，使得 $G=HK$，且对 H 的任意极大子群 H_i 都有 $H_iK<G$。又 $L\leqslant \Phi(G)$，所以 $L\leqslant \Phi(H)$，即存在 H 的一个极大子群 H_1 使得 $H=LH_1$。于是 $G=HK=LH_1K$，由引理 5（iv）知 $|L|=|G:H_1K|=p$。又由引理 3（ii）知 G/L 是 p − 超可解的，因此 G 是 p − 可解的。由此可知，$O_p(G)=L_1\times L_2\times\cdots\times L_t$，$|L_i|=p$，$L_i$ 是 G 的极小正规子群，$i=1,2,\cdots,t$，于是 $G/O_p(G)=G/\cap(C_G(L_i))$ 同构于 $G/C_G(L_1)\times\cdots\times G/C_G(L_t)$ 的一个子群，由于 $G/C_G(L_i)$ 是循环的，所以 $G/O_p(G)$ 是 p − 超可解的，因此 G 是 p − 超可解的，矛盾。定理 5 证毕。

参考文献：

［1］ 黄裕建，李样明. p − 幂零群的一个等价条件［J］. 中山大学学报（自然科学版），2008，47（5）：14 − 17.

［2］ 郭桂容，赵涛. 弱 S − 嵌入子群与有限群的超可解［J］. 中山大学学报（自然科学版），2013，52（4）：25 − 28.

［3］ 何宣丽，李样明，王燕鸣. 含有 C^* − 正规子群的有限群［J］. 中山大学学报（自然科学版），2009，48（5）：12 − 15，23.

［4］ MIAO L，LEMPKEN W. On $\mathcal{M}$ - supplemented subgroups of finite groups［J］. J Group Theory，2009，12（2）：271 − 287.

［5］ 王娜儿，顾春华. 子群的 $\mathcal{M}$ - 可补性质对群结构的影响［J］. 扬州大学学报（自然科学版），2010，13（3）：13 − 16.

［6］ LI X H，ZHAO T. $S\Phi$- supplemented subgroups of finite groups［J］. Ukrainian Math J，2012，64：92 − 99.

［7］ LI J B，XIE F Y. On inequalities of subgroups and the structure of finite groups［J］. J Inequal Appl，2013，2013（1）：427 − 433.

［8］ 郭文彬. 群类论［M］. 北京：科学出版社，1997.

［9］ 徐明曜. 有限群导引（上）［M］. 北京：科学出版社，2007.

［10］ MIAO L，WANG Y M. $\mathcal{M}$ - supplemented subgroups and their properties［J］. Comm Algebra，2009，37（2）：594 − 603.

［11］ 徐明曜，黄建华，李慧陵，等. 有限群导引（下）［M］. 北京：科学出版社，1999.

［12］ GUO W，SHUM K P，SKIBA A N. Criterions of supersolubility for products of supersoluble group［J］. Publ Math Debrecen，2006，68（3/4）：433 − 449.